n 阶网络任意节点的等效电阻的研究

汤　华[1]，谭志中[2]
（1. 运河高等师范学校，江苏 邳州 221300；2. 南通大学 理学院，江苏 南通 226007）

摘要：采用网络分析方法研究了 n 阶网络任意节点之间的等效电阻，构建了差分方程模型，建立了基于边界条件的约束方程，同时给出 n 阶网络任意节点间等效电阻的一个基本公式，并把该公式包含的多种情形与其他结论进行了具体比较.

关键词：n 阶网络；差分方程；边界条件；等效电阻；普适规律

中图分类号：O 441　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-0712(2012)11-0018-05

电阻网络模型的建立与研究已有一百多年历史. 自从 1845 年德国物理学家基尔霍夫(1824—1887)创立了节点电流定律和回路电压定律，人类就开始通过建立电阻网络模型解决许多抽象和复杂的科学问题[1]. 2010 年诺贝尔物理学奖授予石墨烯网络的发现者英国曼彻斯特大学科学家安德烈·海姆和康斯坦丁·诺沃肖洛夫，石墨烯网络的发现不仅表明自然界存在真实的平面电阻网络，同时也表明了电阻网络模型研究的价值. 电阻网络模型的内涵博大精深，不仅被应用于许多科学领域[1-6]，而且应用电阻网络的等效电阻能够创造出一些新的数学理论[1]，这对于培养学生的逻辑推理能力与科学创新思维都具有重要意义.

我们定义 n 阶电阻网络模型[1]的结构如图 1 所示. 此前关于 n 阶电阻网络已经有比较多的研究，文献[1-5]分别用不同的方法研究了二端梯形网络 a、b 端的等效电阻，文献[6]研究了 n 阶电阻网络对角 a、d 的等效电阻. 文献[1]在其 62 页的问题与思考中曾经提出这样一个问题：如果 p 为 bd 边界上的任意节点，则 a、p 二点间的等效电阻 $R_{pa}(n)$ 是什么？本文采用文献[1]中的 5 个步骤开展研究，解决文献[1]中提出的问题，推导出等效电阻 $R_{pa}(n)$ 将是一个包容较多公式(如 $R_{ab}(n)$，$R_{ad}(n)$ 等)的普适公式.

1　电阻网络中的电流规律

如图 1 所示，根据网络分析，设在电阻网络中通入恒定电流 I，电流从 a 输入至 p 输出. 为便于研究，我们将图 1 所示的 n 阶电阻网络重新表示成图 2 所示的含有电流参数及其方向的电阻网络图形，其网络元横向电阻均为 r，纵向电阻均为 r_0. 设二排横向电阻 r 中通过的电流分别为 I_{ak}、I_{bk} $(1\leqslant k\leqslant n)$；纵向电阻 r_0 中通过的电流为 I_k $(1\leqslant k\leqslant n+1)$.

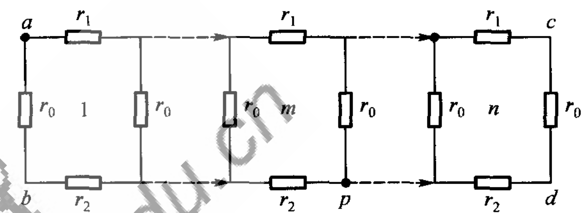

图 1　一般 n 阶电阻网络模型图

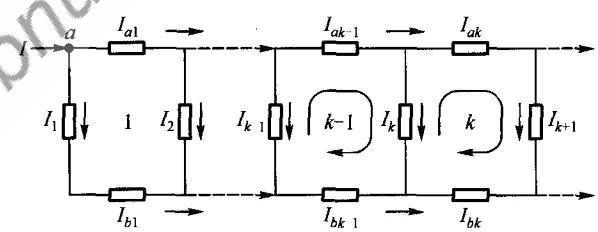

图 1　图 2　n 阶网络任意网络元的电流参数图

根据网络分析得到回路电压方程：

$$I_{ak}r+I_{k+1}r_0-I_{bk}r-I_kr_0=0 \tag{1}$$

$$I_{ak-1}r+I_kr_0-I_{bk-1}r-I_{k-1}r_0=0 \tag{2}$$

由式(1)、式(2)得到

$$(I_{ak}-I_{ak-1})r+(I_{k+1}-I_k)r_0-(I_{bk}-I_{bk-1})r-(I_k-I_{k-1})r_0=0 \tag{3}$$

又由节点电流方程得到

$$I_{ak}-I_{ak-1}=-I_k;\quad I_{bk}-I_{bk-1}=I_k \tag{4}$$

将式(4)代入式(3)化简整理得到

$$I_{k+1}=2(d+1)I_k-I_{k-1} \tag{5}$$

收稿日期：2012-05-16；修回日期：2012-07-10

基金项目：江苏省“青蓝工程”资助；南通大学自然科学研究项目(11Z054)、南通大学教学研究项目(2011B06)资助

作者简介：汤华(1970—)，女，江苏邳州人，运河高等师范学校副教授，硕士，主要从事理论物理研究与物理教学研究工作.

其中 $d=r/r_0$. 由式(5)得差分方程的特征方程：

$$x^2=2(d+1)x-1 \tag{6}$$

设关于 x 的方程的两根分别为 α、β，则解式(6)得

$$\alpha=d+1+\sqrt{d^2+2d}\;;\quad \beta=d+1-\sqrt{d^2+2d} \tag{7}$$

根据文献[5,6]解差分方程的方法解式(5)得

$$I_k=\frac{1}{\alpha-\beta}[(I_2-\beta I_1)\alpha^{k-1}-(I_2-\alpha I_1)\beta^{k-1}],\quad (k\leqslant m+1) \tag{8}$$

$$I_k=\frac{1}{\alpha-\beta}[(I_{m+2}-\beta I_{m+1})\alpha^{k-m-1}-(I_{m+2}-\alpha I_{m+1})\beta^{k-m-1}],\quad (k\geqslant m+1) \tag{9}$$

式(8)、(9)即为任意子网络中通过纵向电阻 r_0 中的电流规律.

2　边界电流规律

边界电流的约束条件有 3 个部分，即最左边与最右边的边界条件约束，以及节点为 p 的边界条件约束.

2.1　边界第 1 网格的电流约束

如图 3，其中第 1 个回路的电压方程为

$$I_{a1}r+I_2r_0-I_{b1}r-I_1r_0=0 \tag{10}$$

并且节点电流方程为

$$I_{a1}=I-I_1,\quad I_{b1}=I_1 \tag{11}$$

由式(10)、(11)可得 $I_2=(2d+1)I_1-dI$，又由式(7)得到 $\alpha+\beta=2+2d$ 所以有

$$I_2=(\alpha+\beta-1)I_1=dI \tag{12}$$

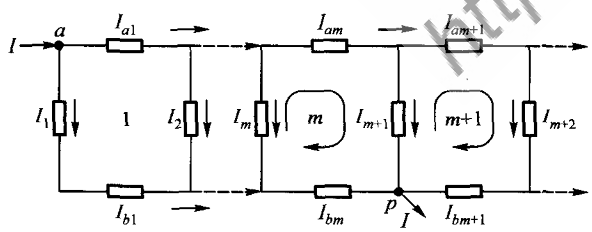

图 3　n 阶电阻网络左边界电流参数图

2.2　边界第 n 网格的电流约束

图 4 中第 n 个网格回路的电压方程为

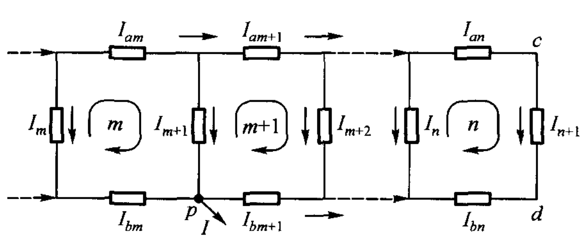

图 4　n 阶电阻网络右边界电流参数图

$$I_{an}r+I_{n+1}r_0-I_{bn}r-I_nr_0=0 \tag{13}$$

并且 $I_{an}=-I_{bn}=I_{n+1}$，将此代入式(13)得到

$$I_{n+1}(\alpha+\beta-1)=I_n \tag{14}$$

又由式(9)得到

$$I_n=\frac{1}{\alpha-\beta}[(I_{m+2}-\beta I_{m+1})\alpha^{n-m-1}-(I_{m+2}-\alpha I_{m+1})\beta^{n-m-1}] \tag{15}$$

$$I_{n+1}=\frac{1}{\alpha-\beta}[(I_{m+2}-\beta I_{m+1})\alpha^{n-m}-(I_{m+2}-\alpha I_{m+1})\beta^{n-m}] \tag{16}$$

所以由式(14)—式(16)得到

$$(I_{m+2}-\beta I_{m+1})(\alpha-1)\alpha^{n-m}=(I_{m+2}-\alpha I_{m+1})(\beta-1)\beta^{n-m} \tag{17}$$

2.3　节点 p_m 的边界电流约束

图 3 或图 4 中第 $m+1$ 和 m 个回路的电压方程分别为：

$$I_{am+1}r+I_{m+2}r_0-I_{bm+1}r-I_{m+1}r_0=0 \tag{18}$$

$$I_{am}r+I_{m+1}r_0-I_{bm}r-I_mr_0=0 \tag{19}$$

并且节点电流方程为

$$I_{am+1}-I_{am}=-I_{m+1},\quad I_{bm+1}-I_{bm}=I_{m+1}-I \tag{20}$$

则由式(19)、(18)并将式(20)代入得

$$I_{m+2}=(\alpha+\beta)I_{m+1}-I_m-dI \tag{21}$$

3　在约束条件下的解

将式(21)代入式(17)得到

$$(\alpha I_{m+1}-I_m-dI)(\alpha-1)\alpha^{n-m}=(\beta I_{m+1}-I_m-dI)(\beta-1)\beta^{n-m} \tag{22}$$

又由式(8)得到

$$I_m=\frac{1}{\alpha-\beta}[(I_2-\beta I_1)\alpha^{m-1}-(I_2-\alpha I_1)\beta^{m-1}] \tag{23}$$

$$I_{m+1}=\frac{1}{\alpha-\beta}[(I_2-\beta I_1)\alpha^{m}-(I_2-\alpha I_1)\beta^{m}] \tag{24}$$

将式(23)、(24)代入式(22)并适当化简整理得到

$$[(I_2-\beta I_1)\alpha^m-dI](\alpha-1)\alpha^{n-m}=[(I_2-\alpha I_1)\beta^m-dI](\beta-1)\beta^{n-m} \tag{25}$$

注意 α、β 是方程 $x^2=2(d+1)x-1$ 的两根，将式(12)代入式(25)化简整理得到

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^{n-m}+\alpha^n)-(\beta-1)(\beta^{n-m}+\beta^n)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right)I \tag{26}$$

由式(12)代入式(24)得到

$$I_{m+1}=\frac{1}{\alpha-\beta}[((\alpha-1)I_1-dI)\alpha^m-((\beta-1)I_1-dI)\beta^m]=\frac{I_1[(\alpha-1)\alpha^m-(\beta-1)\beta^m]-dI(\alpha^m-\beta^m)}{\alpha-\beta} \tag{27}$$

式(26)、式(27)是下文需要的结果.

4 等效电阻 R_{pa}的计算

由图3得 p、a 二点间经过二条不同路径的电压之和为

$$2U_{pa}=\sum_{i=1}^{m}(I_{ai}+I_{bi})r+(I_{m+1}+I_1)r_0$$

根据电流的连续性方程 $I_{ai}+I_{bi}=I$,所以得到

$$U_{ap}=\frac{1}{2}mrI+\frac{1}{2}(I_{m+1}+I_1)r_0 \tag{28}$$

根据欧姆定律得

$$R_{pa}(m,n)=\frac{U_{pa}}{I}=\frac{1}{2}mr+\frac{1}{2}\left(\frac{I_{m+1}+I_1}{I}\right)r_0 \tag{29}$$

将式(27)代入式(29)得

$$R_{pa}(m,n)=\frac{1}{2}mr-\frac{(\alpha^m-\beta^m)}{2(\alpha-\beta)}dr_0+\frac{r_0}{2}\left(1+\frac{(\alpha-1)\alpha^m-(\beta-1)\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\frac{I_1}{I} \tag{30}$$

将式(26)代入式(30)得

$$R_{pa}(m,n)=\frac{1}{2}mr-\frac{(\alpha^m-\beta^m)}{2(\alpha-\beta)}r+\frac{r_0}{4}\left(1+\frac{(\alpha-1)\alpha^m-(\beta-1)\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^{n-m}+\alpha^n)-(\beta-1)(\beta^{n-m}+\beta^n)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right) \tag{31}$$

下面我们将式(31)化为比较简单的形式. 将式(31)的结果重新表示成为

$$R_{pa}=\frac{1}{2}mr+\frac{r_0}{2}\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^{n-m}+\alpha^n)-(\beta-1)(\beta^{n-m}+\beta^n)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right)+f(\alpha,\beta) \tag{31a}$$

则由式(31)与式(31a)得到

$$f(\alpha,\beta)=-\frac{(\alpha^m-\beta^m)}{2(\alpha-\beta)}r+\frac{r_0}{4}\left(-1+\frac{(\alpha-1)\alpha^m-(\beta-1)\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^{n-m}+\alpha^n)-(\beta-1)(\beta^{n-m}+\beta^n)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right)$$

下面对表达式 $f(\alpha,\beta)$ 进行化简. 因为 $2+2d=\alpha+\beta$, $\alpha\beta=1$, $(\alpha-1)^2=\alpha^2-2\alpha+=2d\alpha$,所以得到

$$\left(-1+\frac{(\alpha-1)\alpha^m-(\beta-1)\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^{n-m}+\alpha^n)-(\beta-1)(\beta^{n-m}+\beta^n)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right)=$$

$$\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^m-1)-(\beta-1)(\beta^m-1)}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^{n-m}+\alpha^n)-(\beta-1)(\beta^{n-m}+\beta^n)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right)=$$

$$\frac{(\alpha-1)^2(\alpha^m-1)(\alpha^{n-m}+\alpha^n)+(\beta-1)^2(\beta^m-1)(\beta^{n-m}+\beta^n)}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}-\frac{(\alpha-1)(\beta-1)[(\alpha^m-1)(\beta^{n-m}+\beta^n)+(\alpha^{n-m}+\alpha^n)(\beta^m-1)]}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}=$$

$$\frac{2d(\alpha^m-1)(\alpha^{-m}+1)\alpha^{n+1}+2d(\beta^m-1)(\beta^{-m}+1)\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}+\frac{2d[(\alpha^m-1)(\beta^{-m}+1)\beta^n+(\beta^m-1)(\alpha^{-m}+1)\alpha^n]}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}=$$

$$\frac{2d(\alpha^m-\alpha^{-m})\alpha^{n+1}+2d(\beta^m-\beta^{-m})\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}+\frac{2d[(\alpha^{2m}-1)\beta^n+(\beta^{2m}-1)\alpha^n]}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}=$$

$$\frac{2d(\alpha^m-\beta^m)\alpha^{n+1}+2d(\beta^m-\alpha^m)\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}+\frac{2d[(\alpha^{2m}-1)\beta^n+(\beta^{2m}-1)\alpha^n]}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}=$$

$$\frac{2d(\alpha^m-\beta^m)}{(\alpha-\beta)}+\frac{2d[(\alpha^{2m}-1)\beta^n+(\beta^{2m}-1)\alpha^n]}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}$$

所以(注意 $r=dr_0$)

$$f(\alpha,\beta)=-\frac{(\alpha^m-\beta^m)}{2(\alpha-\beta)}r+\frac{r_0}{4}\left(\frac{2d(\alpha^m-\beta^m)}{(\alpha-\beta)}+\frac{2d[(\alpha^{2m}-1)\beta^n+(\beta^{2m}-1)\alpha^n]}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}\right)=\frac{r}{2}\left[\frac{(\alpha^{2m}-1)\beta^n+(\beta^{2m}-1)\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}\right] \tag{31b}$$

将式(31b)代入式(31a)即得到式(31)的简化式:

$$R_{pa}(m,n)=\frac{1}{2}mr+\frac{r_0}{2}\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^{n-m}+\alpha^n)-(\beta-1)(\beta^{n-m}+\beta^n)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right)+\frac{r}{2}\left(\frac{(\alpha^{2m}-1)\beta^n+(\beta^{2m}-1)\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}\right) \tag{32}$$

其中 α、β 分别是方程式(6)的两根,并且 $0\leqslant m\leqslant n$. 式(31)或(32)即为 p、a 二点间的等效电阻 $R_{pa}(m,n)$的通项表达式. 相对于电路网络的复杂性而言,表达式(32)形式优美、对称、简洁.

5 特例与比例

5.1 n 阶电阻网络入端等效电阻 R_{ab}

当 $m=0$ 时,此时 p 节点与 b 节点重合,如图5所示.

将 $m=0$ 代入式(32)得到

$$R_{pa}=\frac{r_0}{2}\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^n+\alpha^n)-(\beta-1)(\beta^n+\beta^n)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right)+$$

$$\frac{r}{2}\left[\frac{(\alpha^0-1)\beta^n+(\beta^0-1)\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}\right]=$$

$$r_0\left(1-\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right) \qquad (33)$$

此与文献[1]的结论完全一致，与文献[3]的结论等价.

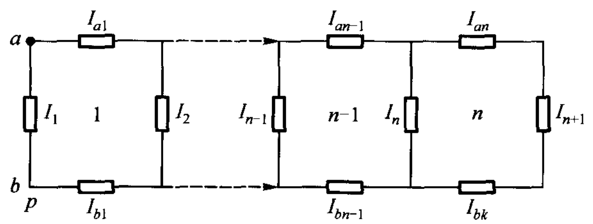

图 5　n 阶电阻网络入端电阻网络示意图

5.2　n 阶电阻网络对角等效电阻 R_{ad}

当 $m=n$ 时，此时 p 节点与 d 节点重合，存在 n 个网格，属于对角情形，如图 6 所示.

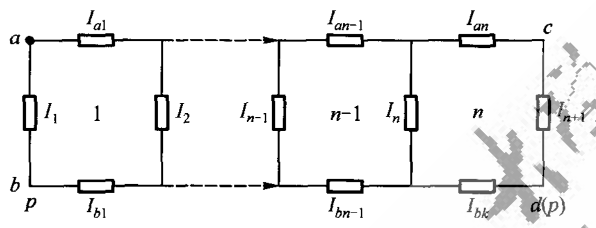

图 6　n 阶电阻网络对角电阻网络示意图

将 $m=n$ 代入式(32)得到

$$R_{pa}=\frac{1}{2}nr+\frac{r_0}{2}\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^0+\alpha^n)-(\beta-1)(\beta^0+\beta^n)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right)+$$

$$\frac{r}{2}\left[\frac{(\alpha^{2n}-1)\beta^n+(\beta^{2n}-1)\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}\right]=$$

$$\frac{1}{2}nr+\frac{r_0}{2}\left(\frac{(\alpha-1)(1+\alpha^n)-(\beta-1)(1+\beta^n)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right)=$$

$$\frac{1}{2}nr+\frac{r_0}{2}\left(1-\frac{\alpha^n-\beta^n-(\alpha-\beta)}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right) \qquad (34)$$

此结果与文献[1]的结论完全一致，与文献[6]的结论等价.

5.3　n 阶无穷网络的等效电阻

在图 1 中，当 $n\to\infty$ 时，图 1 所示网络为无穷 n 阶电阻网络. 由式(7)易得：$0<\frac{\beta}{\alpha}<1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0 \qquad (35)$$

由式(32)取极限易得

$$R_{pa}(\infty)=\frac{1}{2}mr+\frac{r_0}{2}\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha^{-m}+1)}{\alpha}\right)+\frac{r}{2}\left(\frac{\beta^{2m}-1}{(\alpha-\beta)\alpha}\right)=$$

$$\frac{1}{2}mr+\frac{r_0}{2}\left(\frac{(\alpha-1)(\beta^m+1)}{\alpha}\right)+\frac{r}{2}\left(\frac{\beta^{2m}-1}{(\alpha-\beta)\alpha}\right)=$$

$$\frac{1}{2}mr+\frac{(\beta^m+1)}{2}\left\{r_0(1-\beta)+r\left(\frac{\beta^m-1}{\alpha^2-1}\right)\right\} \qquad (36)$$

此即为 n 阶无穷网络的等效电阻公式，并且当 m 为有限值时式(36)是一个有限值.

6　结语

本文研究了图 1 所示的 n 阶（实际可称为 $1\times n$ 阶）网络任意节点 p、a 二点间的等效电阻 $R_{pa}(m,n)$ 的一个基本公式. 回答了文献[1]中曾经提出的一个问题（如果 p 为 bd 边界上的任意节点，则研究 a、p 二点间的等效电阻 $R_{pa}(n)$ 是什么?）. 这里得到的等效电阻公式是一个比较有意义的结果，因为等效电阻 $R_{pa}(m,n)$ 包容了较多的等效电阻公式.

顺便指出，本文获得的基本公式也适用于图 1 结构的 n 阶电容网络，但必须注意取代关系，即 $C_n=1/R_n$，$C_0=1/r_0$，$C=1/r$，这样可直接得到 $1\times n$ 阶电容网络任意节点等效电容的通项表达式（限于篇幅，此处从略）.

参考文献：

[1]　谭志中. 电阻网络模型[M]，西安：西安电子科技大学出版社，2011：1-70.

[2]　陆建隆，谭志中. 关于梯形网络等效电阻的普适研究[J]. 大学物理，2001，20(10)：26-28.

[3]　李建新，刘栓江. n 级梯形电阻网络的研究[J]. 大学物理，2003，22(7)：20-21.

[4]　李永安. 梯形网络等效电阻网络分析的再研究[J]. 大学物理，2003，22(10)：12-14.

[5]　谭志中，陆建隆. 建构非线性数列模型研究二端梯形网络等效值[J]. 河北师范大学学报（自然科学版）2001，25(3)：339-344.

[6]　谭志中，赵素英. n 阶电阻网络等效电阻的普适研究[J]. 河北师范大学学报（自然科学版）2004，28(2)：149-154.

[7]　Chatzarakis G E, Chatzarakis E G, et al. Finding the equivalent resistance, inductance, capacitance, and impedance: A new powerful pedagogical method[J]. Intl J Elect Enging Educ, 2007, 44(1): 64-75.

[8]　Jafarizadeh S, Sufiani R, Jararizadeh M A. Evaluation of Effective Resistances in Pseudo-Distance-Regular Resistor Networks[J]. J Stat Phys, 2010, 139: 177-199.

[9]　Molina M I. Interaction of a discrete soliton with a surface mode[J]. Phys Rev B, 2006, 73: 014204.

[10]　Peter M Osterberg, Aziz S. Inan: Impedance between ad-

jacent nodes of infinite uniform D-dimensional resistive lattice[J]. Am J Phys, 2004, 72(7): 972-973.

[11] Stefano, Giordano. Disordered lattice networks: general theory and simulations [J]. Int J Circ Theor Apprl, 2005, 33: 519-540.

[12] Bianco B, Giordano S. Electrical characterisation of linear and non-linear random networks and mixtures[J]. Int J Circ Theor Appl, 2003, 31(2): 199 -218.

[13] Cserti J. Application of the lattice Green's function for calculating the resistance of an inrinite network of resistors[J]. Am J Phys, 2000, 68(10): 896-906.

Study on equivalent resistance between any nodes of *n* step network

TANG Hua[1], TAN Zhi-zhong[2]

(1. Yunhe Teachers' College, Pizhou, Jiangsu 221300, China; 2. School of Science, Nantong University, Nantong, Jiangsu 226007, China)

Abstract: The equivalent resistance between any nodes of *n* step network is studied through analysis of network. A model of matrix transform is constructed and a constraint equation on the basis of boundary condition is established. Meanwhile, we work out a fundamental formula of equivalent resistance between any nodes of *n* step network, and compare different situations of the formula with other conclusions.

Key words: *n* step network; matrix transform; boundary condition; equivalent resistance; general formula

(上接6页)

心轴对称，式(14)化为 $mv_s r=n\hbar$，这等同于小涡旋周围液滴角动量处处相同，且是量子化的. 根据前面讨论，这种情况下小涡旋中心外是旋涡面，当然范围很小. 这些小涡旋(微观上每个呈现旋涡面)的宏观效果等效于整体有一个角速度旋转(类似于均匀磁化的磁介质，无数个安培分子电流等效于边界上一个宏观磁化电流)，因而，超流液面宏观上仍保持旋转抛物面[3].

3 结论

黏滞液体的旋转是通过黏滞带动的，其液面形状取决于液体是如何旋转起来的. 如果液体是由外面的边界带动旋转的，此时，整体角速度相同，液面呈现旋转抛物面. 如果液体由中心旋转带动，外边界静止且距离较远，此时液面呈现旋涡面. 如果液体在两个同轴圆柱间旋转，液面形状既非旋转抛物面，也非旋涡面. 非黏滞液体，比如超流液体，由于需要满足无旋条件，旋转会激发无数小涡旋，宏观上这些小涡旋等效于同一角速度的整体转动，因而液面呈现旋转抛物面.

参考文献:

[1] 赵凯华，罗蔚茵. 力学(新概念物理教程)[M]. 北京：高等教育出版社，2004：85-87.

[2] Feynman R P, Leighton R B, Sands M. The Feynman Lecture on Physics, Vol. Ⅱ [M]. Addison-Wesley Publication Company, 1966: 41-1.

[3] Annett J F. Superconductivity, Superfluids, and Condensates[M], Oxford: Oxford University Press, 2004: 30-34.

Surface shape of rotating liquid

AN Yu

(Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Analyzing rotational motion of a viscous fluid, we find that the surface shape of the rotating liquid depends on how the liquid is rotated. If the liquid is rotated by the outer boundary, its surface appears the shape of paraboloid of revolution; if the liquid is rotated from its center, the surface appears whirlpool shape.

Key words: viscous fluid; surface shape