

倒摆运动的混沌行为

陈立宏¹, 彭建华^{1,2}, 夏彬¹, 王广¹, 高东明³(1. 东北师范大学物理学院, 吉林 长春 130024; 2. 深圳大学理学院, 广东 深圳 518060;
3. 秦皇岛市一中, 河北 秦皇岛 066000)

摘要: 设计一个受周期外力驱动倒摆实验装置, 并建立该系统的动力学方程, 用线性稳定性分析方法讨论了平衡点附近邻域稳定性, 利用数值计算并结合多种分析方法求解非线性方程并判断解的性质. 通过改变系统参数, 画出时域图、相图及分岔图, 计算分析和实验发现, 这个简单的力学系统存在十分丰富的动力学行为(分岔、混沌). 理论分析、数值模拟和实验结果一致.

关键词: 倒摆; 线性稳定性; 平衡点; 分岔; 混沌

中图分类号: O 415.5; O 32

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712(2005)09-0044-04

为了能对混沌现象有深入的了解, 我们结合目前广为使用的一些大学物理本科及非物理类本科力学^[1]、基础物理学^[2-3]教材中介绍的一些典型的非线性系统, 从典型的振动情况入手, 设计了一个简单的能呈现混沌运动的演示装置, 即在倒摆的底部加一个小车, 给小车一个周期性外力驱动, 考虑空气的黏性阻力影响, 建立系统的动力学模型, 进一步利用线性稳定性的分析方法分析系统的稳定性, 并用数值计算法确定系统的动态特性, 得到了十分丰富的混沌行为.

1 实验装置及动力学方程

实验装置如图 1 所示. 与文献[1]相比有两处变化:

- 1) 将倒摆置于水平往复运动的小车平台上.
- 2) 小车一端有一刚性曲柄连杆与变频电机相接, 通过电机转动产生周期性外力驱动系统, 使小车在光滑水平面上沿水平方向作往复直线运动, 即构成

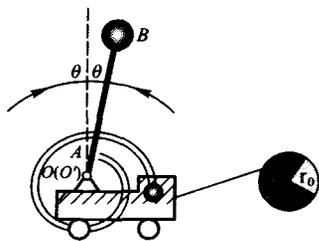


图 1 设计的实验装置图

一个简单的受迫振动系统.

设 O 为系统往复运动的中心点, 选此点为惯性系 $O-xy$ 的坐标原点, 选摆杆与小车连接处 O' 为非惯性系 $O'-x'y'$ 的原点. 以倒摆(小球、摆杆)为研究对象(杆较轻, 质量忽略不计), 在任意时刻 t , 小球位于 B 点, $O'B$ 与 $O'y'$ 的夹角为 θ , 如图 2(a) 所示; 其受力分析如图 2(b) 所示, 其中 G 、 F_s 、 F_R 、 F_r 、 F_N 分别是倒摆所受重力、弹力、惯性力、阻尼力和支持力. 取 O' 为参考点, 根据质点对参考点的角动量定理, 可得小球在非惯性系中的运动方程为

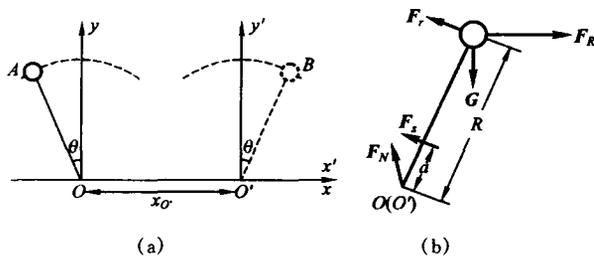


图 2 坐标系的选取和倒摆的受力分析

$$\frac{dL}{dt} = mR^2 \ddot{\theta} = M_G + M_s + M_R + M_r + M_N \quad (1)$$

由于支持力 F_N 对转动力矩无贡献, 故 $M_N = 0$, 其中 L 表示总角动量, R 表示摆长, M_G , M_s , M_R , M_r 分别为重力矩、弹性力矩、惯性力矩和阻尼力矩.

O' 在 $O-xy$ 坐标中的运动规律为

$$X_{O'}(t) = r_0 \cos(\omega_d t) \quad (2)$$

$$\dot{X}_{O'}(t) = -r_0 \omega_d^2 \cos(\omega_d t) = -a_0 \cos(\omega_d t) \quad (3)$$

式中 r_0 表示曲柄的长度, ω_d 为电机的转动角频率, 即系统的周期驱动频率, $a_0 = r_0 \omega_d^2$, $\ddot{X}_{O'}(t)$ 是非惯性系相对于惯性系的加速度, 于是式(1)可以写成

$$mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = mgR \sin \theta - k'a^2 \theta - \gamma R^2 \dot{\theta} + ma_0 \cos(\omega_d t) \cdot R \cos \theta \quad (4)$$

利用文献[4]中的标度变换以及 $k = k'a^2 / mgR$, 将式(4)化成

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = \sin \theta - k\theta - \gamma \frac{d\theta}{d\tau} + A \cos \theta \cos \omega_0 \tau \quad (5)$$

式(5)反映了小球在非惯性系 $O' - x'y'$ 中的运动所遵循的动力学规律, 而小球在惯性系 $O - xy$ 中的位置由下式确定:

$$\begin{cases} X(t) = X_{O'}(t) + R \sin \theta(t) \\ Y(t) = R \cos \theta(t) \end{cases} \quad (6)$$

因此, 我们可以通过研究小球在非惯性系中的运动规律得到它在惯性系中的运动特点.

2 系统的线性稳定性分析

令 $\theta = x, \dot{\theta} = y$, 在无驱动的情况下, 方程(5)化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin x - kx - \gamma y \end{cases} \quad (7)$$

系统平衡点满足方程

$$\begin{cases} y^* = 0 \\ \sin x^* - kx^* = 0 \end{cases} \quad (8)$$

由上面方程可知: 当 $k > 1$ 时, 函数 $y_1(x) = \sin x, y_2(x) = k$, 与函数的曲线^[1] 只有一个交点, 即系统只有一个平衡点 $(x', y') = (0, 0)$; $k < 1$ 时, 这两条曲线有三个交点, 如图 3, 即系统有 3 个平衡点: $(x^*, y^*) = (0, 0), (x^*, y^*) = (\pm x_0, 0)$, 其中 $x_0 \in (0, \pi)$.

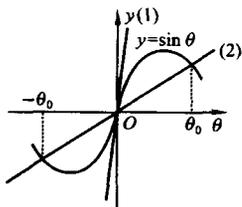


图 3 作图法求根

在平衡点附近做泰勒展开, 忽略二阶及其高阶无穷小项, 将之转化成线性方程 $x = x^* + \delta x, y = y^* + \delta y$, 则有

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中 $c = k - \cos x^*$.

系数矩阵的特征方程和特征根分别为:

$$\lambda^2 + \gamma \lambda + k - \cos x^* = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4(k - \cos x^*)}}{2} \quad (10)$$

对于 $x^* = 0$, 当 $k > 1$ 时, 若 $\gamma^2 - 4(k - \cos x^*) > 0$, 则 $x^* = 0$ 是稳定结点; 若 $\gamma^2 - 4(k - \cos x^*) < 0$, 则有 $Re(\lambda_{1,2}) < 0, x^* = 0$ 是稳定焦点; 当 $k < 1$ 时, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, 此时 x^* 是不稳定的鞍点.

对于 $x^* = \pm x_0$, 只有 $k < 1$ 时存在这种情况.

因为 $k = \frac{\sin x^*}{x^*}$, 所以 $k - \cos x^* > 0, \left[\frac{\sin x}{x} > \cos x, x \in (-\pi, \pi) \right]$. 若 $\gamma^2 - 4(k - \cos x^*) > 0$, 则有 $\lambda_{1,2} < 0, \pm x_0$ 是稳定结点; 若 $\gamma^2 - 4(k - \cos x^*) < 0$, 则有 $Re(\lambda_{1,2}) < 0, \pm x_0$ 是稳定焦点.

3 系统的动态特性(分岔于混沌行为)

考虑系统有阻尼且有驱动情形下, 研究系统的动力学行为. 对式(5)进行数值求解, 采用四阶龙格-库塔数值解法, 结合时域图、相图等定性、定量分析方法确定解的动态性质.

实际实验中, 将小车用套管约束在桌上两平行的滑杆上, 如图 4 所示. 通过改变输入给变频电机的电压来实现电机转动频率(或角频率)的变化, 即达到调控该系统其中一个参数, 而使系统呈现多种复杂的动态行为. 实验测得的驱动电压与驱动角频率的关系为线性的, 如图 5 所示. 将式(5)化成自治方程形式:

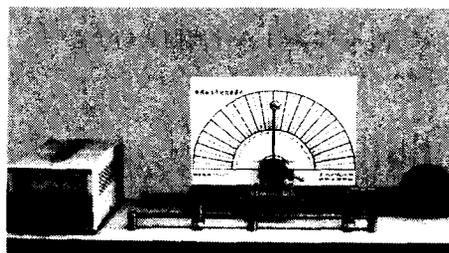


图 4 实际中的实验装置图

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin x - kx - \gamma y + A \cos x \cos z \\ \dot{z} = \omega_0 \end{cases} \quad (11)$$

$x(0) = 1.0, y(0) = 1.0, z(0) = 0$, 其中 $x = \theta, y =$

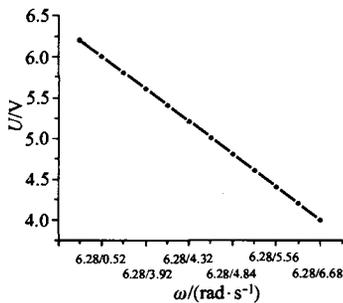


图 5 驱动电压与驱动轮角频率的关系

$\theta, z = \omega_0 \tau$. 上式中有三个可调参量: ω_0, γ 和 k , 每个参量的改变都会引起解的变化.

本文讨论了固定 $k = 0.8, \gamma = 0.15, R = 0.13 \text{ m}, a = 0.0235 \text{ m}, r_0 = 0.06 \text{ m}$ 时, 改变 ω_0 值, 用四阶龙格-库塔法求系统(11)的数值解, 绘制时域图和相图判断解的性质(即解的动态行为).

图 6(a)、(b)分别是 $\omega_0 = 1.25 \sim 1.412$ 之间系统呈一周期的时域图和相图; 图 7(a)、(b)分别是 $\omega_0 = 1.412 \sim 1.449$ 之间系统呈二周期的时域图和相图. 图 8(a)、(b)则分别是 $\omega_0 = 1.52 \sim 1.646$ 之间系统呈混沌运动的时域图和相图. 由图 6 可知, 当 $\omega_0 = 1.35$ 时, 系统呈 1P(P 为周期 Period)运动状态; 当 $\omega_0 = 1.435$ 时, 系统呈 2P 运动状态, 出现第一次分岔(见图 7); 随着 ω_0 值增大, 依次可得 4P, 8P, ... 分岔到混沌及周期窗口等结果(见图 8、图 9).

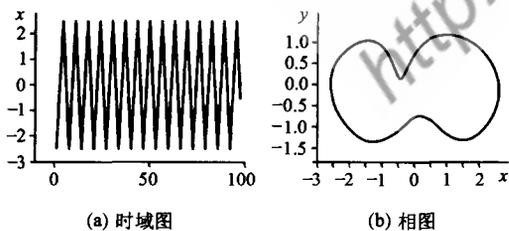


图 6 $\omega_0 = 1.3$ 一周期运动状态

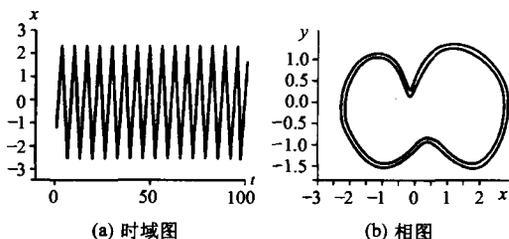


图 7 $\omega_0 = 1.435$ 二周期运动状态

图 9(a)是系统的分岔图, 由图可以看出随着驱动角频率的逐步增加, 系统呈现一个由一分二, 二分四, 经过倍周期分岔后进入混沌状态的一个过程, 后

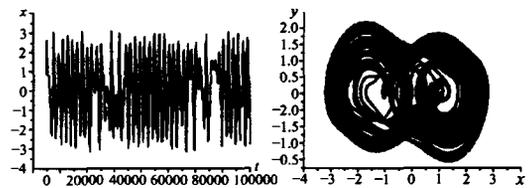


图 8 $\omega_0 = 1.6$ 混沌运动状态

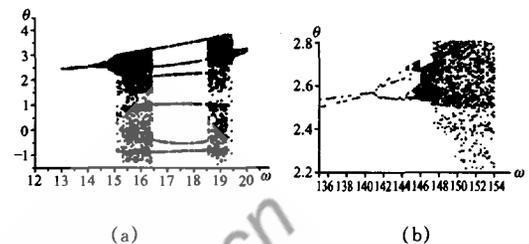


图 9 系统的分岔图和局部放大分岔图

面的空白处是周期窗口, 周期窗口之后再进入混沌状态, 他们都处在一个较宽的范围内, 有利于在演示中观察. 而图 9(b)则是图 9(a)开始部分的局部放大分岔图, 通过它可明显观察到一个完整的倍周期分岔序列.

图 10 中, (a)为 $k = 0.9, \gamma = 0.15, R = 0.13 \text{ m}, a = 0.0235 \text{ m}, r_0 = 0.06 \text{ m}$; (b)为 $k = 0.9, \gamma = 0.1, R = 0.13 \text{ m}, a = 0.0235 \text{ m}, r_0 = 0.06 \text{ m}$. 通过图 10 中两组参数计算分析得出的两张分岔图都呈现系统由倍周期分岔通向混沌的过程.

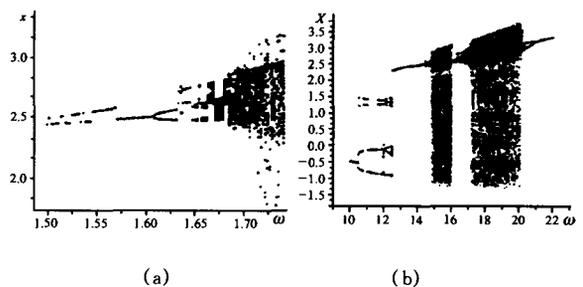


图 10 不同参数的系统的分岔图

综合以上的分析可知, 在一定参数条件下, 受迫倒摆弹簧振子模型的动力学系统可呈现丰富的混沌与分岔行为, 并且所有参数值均选在实验(得出的数据)可取范围之内.

参考文献:

[1] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995. 129~131.

- [2] 朱荣华. 基础物理学[M]. 北京:高等教育出版社, 2000. 64~87.
- [3] 陆果, 陈凯旋. 基础物理学[M]. 北京:高等教育出版社, 1999. 46~64.
- [4] 李春萍, 彭建华, 贾玉江. 水平往复运动的半圆形轨道上的弹簧振子的混沌运动行为[J]. 大学物理, 1999, 18(11):1~7.

The chaos character of the movement of inverse pendulum

CHEN Li-hong¹, PENG Jian-hua^{1,2}, XIA Bin¹, WANG Guang¹, GAO Dong-ming³

(1. Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China; 2. College of Science, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China; 3. No1 Senior School, Qinhuangdao 066000, China)

Abstract: An experimental device of the forced inverse pendulum is designed and the dynamical equation is proposed. By using the method of the linear stability analysis, the stability of the system is discussed in the neighborhood of the equilibrium points. The character of the solutions can be obtained by numerical simulation and other analysis methods. From the results of computer simulation and experiment some time-series diagrams, phase diagrams and bifurcation diagrams for the oscillations of this system, these show that there are various kind of dynamical phenomena in this simple system. Theory analysis and numerical simulation well agree with the experiment results.

Key words: inverse pendulum; equilibrium point; bifurcation; chaos

(上接 41 页)

- [2] 王竹溪. 热力学[M]. 北京:高等教育出版社, 1983. 156~157.
- [3] 郭平生, 韩光泽, 华贲. 能量公设与热力学系统独立状态参量的选取[J]. 大学物理, 2004, 23(8):27~29.
- [4] 郭平生, 韩光泽, 张妮, 等. 外场协同强化扩散传质过程的唯象分析[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2004, 22(4):14~17.
- [5] 汪忠诚. 热力学·统计物理[M]. 北京:高等教育出版社, 2003. 126.

The energy postulate and general form of the free energy criterion

GUO Ping-sheng¹, HAN Guang-ze², HUA Ben²

(1. Institute of Physics and Information Technology, Guangxi Normal University, Guilin 541002, China;
2. Education Ministry's Key Laboratory of Enhanced Heat Transfer and Energy Conservation, Institute of Chemical Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: The general form of the free energy and its criterion is deduced from the energy postulate, and the essential connotation of the free energy and its criterion is discussed. It is considered that the general form of the free energy is summation of all energy forms correlating with N kinds of work in a thermodynamic system and that the irreversible processes of an isolated system for ever results in the reduction of total free energy under the condition of the fixed temperature. It is showed by an example how the general form of the free energy criterion is applied, which embodies the philosophy thought that all kinds of movement may interact.

Key words: energy postulate; free energy criterion; water drop increase