相互作用能、势能以及极化状态改变作功

杜 浩
(浙江师范大学 物理系,浙江 金华 321004)

摘要:指出在一般教学参考书中给出的静电场互作用能公式,仅仅是电势能公式.两个带电物体间的相互作用能,除了势能以外,还应包括由于相互极化导致物体极化状态改变所作的功和外电源提供的能量.本文导出了两个带电物体间相互作用能的普遍公式.

关键词:相互作用能;势能;带电物体;纯电荷体系
中图分类号:O 441.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-0712(2002)01-0011-08

具有电荷分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ 的体系在外电场 φ_e 中的相互作用能为

$$W_i = \int_V \rho\varphi_e \mathrm{d}V \tag{1}$$

由此式导出点电荷 q 在外电场 φ_e 中的能量为 $q\varphi_e$.电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 在外场 $\boldsymbol{E}_e$ 中的能量为 $-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_e$,这些就是常用的互作用能公式[1~3].值得注意的是,式(1)中 ρ 是与外场 φ_e 无关的独立的电荷体系,而 φ_e 也是与 ρ 无关的独立的外场.同样,q 与 φ_e,$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{E}_e$ 也是相互独立的、无关的量.

当我们应用这些相互作用能公式来计算具体问题时,却常使人感到困惑.例如把一块中性的可极化的线性介质,移入稳定电场中,计算介质所具有的能量(即它们的互作用能)时,若将可极化介质作为"研究对象",而外电场作为外部体系,显然"研究体系"的 $\rho=0$,故由式(1)知,$W_i=0$.但事实上,介质在外场作用下,极化或磁化会产生诱导电磁场,诱导电磁场也具有能量.即介质从未极化状态到某种极化状态,外力对介质作了功.互作用能不可能为0,这又是怎么回事呢?

1 相互作用能、势能和极化状态改变作的功

设带电物体1单独存在空间的 V_1 区域时,它激励的电场记为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{D}_1$,它的电荷分布为 ρ_1;带电物体2单独存在空间的 V_2 区域时,它激发的电场为 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{D}_2$,它的电荷分布为 ρ_2;二者同时分别存在 V_1 和 V_2 区域时,共同激发的电场为 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$,则互作用能定义为[1~3]

$$W_i = \frac{1}{2}\int_\infty \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\int_\infty \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_1\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\int_\infty \boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_2\mathrm{d}V \tag{2}$$

如果两个带电物体都是纯电荷体系,空间为真空,由于没有承载电荷的物体,不会发生相互极化或感应,也就不存在极化状态改变的问题.因此有

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2 \tag{3}$$

代入式(2)中有

$$W_i = \frac{1}{2}\int_\infty (\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_2 + \boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_1)\mathrm{d}V = \int_{V_1}\rho_1\varphi_2\mathrm{d}V = \int_{V_2}\rho_2\varphi_1\mathrm{d}V \tag{4}$$

式(4)即为式(1),表示纯电荷体系1位于纯电荷系2的电场中具有的能量,是把纯电荷系1

收稿日期:1999-12-07;修回日期:2001-06-14
作者简介:杜浩(1943—),男,浙江东阳人,浙江师范大学物理系教授,主要从事光声、光热技术及应用研究.

从无穷远处移到电荷系 2 的电场中所作的功，此即电势能．因此式(1)、(4)确切地说是电荷体系的势能公式．同样，$q\varphi_e$ 和 $-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_e$ 也是势能公式，此时互作用能仅由势能构成．

若有一个或两个都不是纯电荷体系，而是带电的(或不带电的)可极化介质或导体，它们同时分别存在于 V_1 和 V_2 区域时，相互要极化或感应，引起诱导电场．因此 $\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2$．相互作用能就不仅仅是纯电荷 ρ_1 和 ρ_2 之间的势能，还应包括两个带电物体相互极化或感应所引起的带电状态改变所作的功．

例题 半径为 R_0 的带电 Q 的导体球，距球心 $h(h>R_0)$ 处有一点电荷 q(如图 1)，求点电荷与带电球的互作用能．

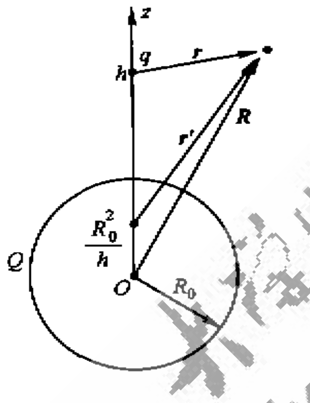

图 1

显然，电荷 q 单独存在时电场为

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

带电导体球单独存在时电场为

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\boldsymbol{R}$$

它们同时存在时的电场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}-q\frac{R_0}{h}\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3}+\frac{\left(Q+q\frac{R_0}{h}\right)\boldsymbol{R}}{R^3}\right]$$

其中 $R^2=x^2+y^2+z^2$，$r^2=x^2+y^2+(z-h)^2$，$r'^2=x^2+y^2+(z-R_0^2/h)^2$，可见 $\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$．$\boldsymbol{E}$ 中出现由 q 引起的感应电荷 $\pm q\frac{R_0}{h}$ 的电场，此时导体球的带电状态不同于单独存在时的带电状态，这个带电状态的改变必须作功，这部分功应包括在互作用能内．

按式(1)或式(4)求互作用能，将带电导体球作为"外部体系"，则

$$\varphi_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{h}$$

将点电荷 q 作为"研究体系"，则有

$$W_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{h}$$

显然这个互作用能是错误的，因为它仅仅是点电荷 q 在 Q 电场中具有的电势能．而导体球在点电荷 q 的作用下出现感应电荷，使导体球的带电状态发生变化，状态变化所作的功没有包括在互作用能之中．

若按式(2)求，点电荷 q 的自能

$$W_{s1}=\frac{1}{2}\int_\infty\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_1\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_{V_1}\rho_1\varphi_1\mathrm{d}V=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{V_1}\frac{\delta(x,y,z-h)}{r}\mathrm{d}V \tag{5}$$

V_1 为点电荷体积，若 $V_1=0$，则此积分发散．带电导体球自能为

$$W_{s2}=\frac{1}{2}\int_\infty\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\oint_{R_0}\varphi_2\sigma\mathrm{d}S=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R_0} \tag{6}$$

点电荷和带电导体球同时存在时总场能

$$W_t=\frac{1}{2}\int_\infty\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\oint_{R_0}\varphi\sigma\mathrm{d}S+\frac{1}{2}\int_{V_1}\rho\varphi\mathrm{d}V \tag{7}$$

式(7)右边第 1 项球面积分，因球面为等势面，φ 为常量提出积分号外，球面总电荷为 Q，故

$$\frac{1}{2}\oint_{R_0}\varphi\sigma\mathrm{d}S=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q+q\frac{R_0}{h}}{R_0}Q \tag{8}$$

式(7)右边第 2 项体积分为点电荷体积 V_1．点电荷密度 $\rho=q\delta(x,y,z-h)$，而 φ 为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r}-\frac{q\frac{R_0}{h}}{r'}+\frac{Q+\frac{R_0}{h}q}{R}\right] \tag{9}$$

代入此项积分式，得

$$\frac{1}{2}\int_{V_1}\rho\varphi\mathrm{d}V=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{V_1}\frac{\delta(x,y,z-h)}{r}\mathrm{d}V+$$

$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q^2\frac{R_0}{h}}{h-\frac{R_0^2}{h}}+\frac{q(Q+q\frac{R_0}{h})}{h}\right] \tag{10}$$

将式(5)~(10)代入式(2),互作用能为

$$W_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{h}+\frac{1}{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R_0 q}{h}\left[\frac{1}{h}-\frac{1}{h-\frac{R_0^2}{h}}\right] \tag{11}$$

可见,点电荷与带电导体球的互作用能由两部分构成,一部分是势能,即式(11)右边第 1 项,表示在 q 的电场中,把电荷 Q 移到球面上作的功;第二部分,即右边第 2 项,为导体球带电状态改变所作的功,即在 q 的电场中移入一个不带电的中性导体球时所作的功,或者说,是使导体球产生感应电荷 $\pm q\frac{R_0}{h}$ 时所作的功.注意此功有 $\frac{1}{2}$ 因子.直接从式(4)是得不出式(11)的结果的.

2　互作用能公式的一般形式

互作用能公式的普遍形式是什么呢?普遍形式应该从定义式(2)直接推导.

设带电物体 1 位于 V_1 区域,自由电荷分布为 $\rho_1(\boldsymbol{x})$,介电常量为 ε_1;带电物体 2 位于 V_2 区域,介电常量为 ε_2,自由电荷分布为 $\rho_2(\boldsymbol{x})$;V_1,V_2 区域以外为真空,用 V_3 表示;带电体 1 单独存在时电场为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{D}_1$,带电体 2 单独存在时电场为 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{D}_2$,两个带电体同时存在时,电场为 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$.并设 $\rho_1(\boldsymbol{x})$ 和 $\rho_2(\boldsymbol{x})$ 分布始终不变.由式(2)知:

$$\begin{aligned}W_i=&\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_2)\mathrm{d}V=\\&\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)\mathrm{d}V+\\&\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D})\mathrm{d}V+\\&\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D})\mathrm{d}V+\\&\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_1)\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{12}$$

积分区域为全空间.令 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=-\nabla(\varphi+\varphi_1+\varphi_2)$,式(12)右边第一项为

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int\nabla\cdot[(\varphi+\varphi_1+\varphi_2)(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)]\mathrm{d}V\\&+\frac{1}{2}\int(\varphi+\varphi_1+\varphi_2)\nabla\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{13}$$

因为 $\rho_1(\boldsymbol{x})$,$\rho_2(\boldsymbol{x})$ 分布不变,式(13)$\nabla\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=0$,积分为零.式(13)第 1 项化为无穷大球面积分,也为零.故式(12)右边仅留下后 3 项.因在 V_3 区域有 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}_1=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{D}_2=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_2$;在 V_1 区域有 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_1\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}_1=\varepsilon_1\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{D}_2=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_2$;在 V_2 区域有 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_2\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}_1=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{D}_2=\varepsilon_2\boldsymbol{E}_2$,因此

$$\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_{V_2}(\varepsilon_0-\varepsilon_2)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}V=-\frac{1}{2}\int_{V_2}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}V \tag{14}$$

式(14)中 $\boldsymbol{P}$ 是两带电体同时存在时,ε_2 介质的总极化强度,同理有

$$\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_{V_1}(\varepsilon_0-\varepsilon_1)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}V=-\frac{1}{2}\int_{V_1}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}V \tag{15}$$

式(15)中 $\boldsymbol{P}$ 是两带电体同时存在时,ε_1 介质的总极化强度.显然

$$\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{D}_1)\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_{V_2}\rho_2\varphi_1\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\int_{V_1}\rho_1\varphi_2\mathrm{d}V \tag{16}$$

因此式(2)成为

$$W_i=\frac{1}{2}\int_{V_1}\rho_1\varphi_2\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\int_{V_2}\rho_2\varphi_1\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\int_{V_1}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\int_{V_2}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}V \tag{17}$$

式(17)为互作用能的普遍形式.当其中一个是不带电的中性物体时,例如 $\rho_2=0$,则 φ_2、$\boldsymbol{E}_2$ 也为 0,式(17)仅剩第 4 项.此即静电场中移入一中性可极化介质时的互作用能[4~6].正如文献[4]和本文开头所说,外力移动介质进入静电场,使它从未极化到某种极化状态,外力作功,使介质极化能从 0 增长到某值.由能量守恒,增加的极化能应等于外力所作的功.此互作用能就是介质极化状态改变所作的功.当两带电体

都是纯电荷系，空间为真空或充满均匀介质时，式(14)和(15)为0，式(17)就回到式(4)，即两个纯电荷系的互作用能，此时没有极化状态的改变，互作用能仅为势能．这是两种特殊情况．式(17)包括这两种特例，应当是电势能与极化状态改变作功之和．

为了进一步认识式(17)的这个物理意义，设 $\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 分别为带电物体1，2单独存在时的极化强度，改变式(17)的形式：

$$\begin{aligned}W_i = &\frac{1}{2}\int_{V_1}\rho_1\varphi_2\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\int_{V_1}\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}V - \\ &\frac{1}{2}\int_{V_1}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}V + \\ &\frac{1}{2}\int_{V_2}\rho_2\varphi_1\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\int_{V_2}\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}V - \\ &\frac{1}{2}\int_{V_2}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2)\cdot\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{18}$$

因为

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_{V_1}\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}V = &\frac{1}{2}\int_{V_1}\nabla\cdot\varphi_2\boldsymbol{P}_1\mathrm{d}V - \\ &\frac{1}{2}\int_{V_1}\varphi_2\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\oint_{S_1}\varphi_2\sigma_{p1}\mathrm{d}S + \\ &\frac{1}{2}\int_{V_1}\rho_{p1}\varphi_2\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{19}$$

式中 ρ_{p1} 和 σ_{p1} 分别是带电物体1单独存在时的极化体电荷和极化面电荷，是 ρ_1 在自己所在介质 ε_1 上引起的极化电荷．同理

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_{V_2}\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}V = &\frac{1}{2}\oint_{S_2}\varphi_1\sigma_{p2}\mathrm{d}S + \\ &\frac{1}{2}\int_{V_2}\rho_{p2}\varphi_1\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{20}$$

式中 ρ_{p2} 和 σ_{p2} 分别是带电物体2单独存在时的极化体电荷和极化面电荷，是 ρ_2 在自己所在介质 ε_2 上引起的极化电荷．把式(19)、(20)代入式(18)，有

$$\begin{aligned}W_i = &\frac{1}{2}\int_{V_1}(\rho_1+\rho_{p1})\varphi_2\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\oint_{S_1}\varphi_2\sigma_{p1}\mathrm{d}S - \\ &\frac{1}{2}\int_{V_1}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}V + \\ &\frac{1}{2}\int_{V_2}(\rho_2+\rho_{p2})\varphi_1\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\oint_{S_2}\varphi_1\sigma_{p2}\mathrm{d}S - \\ &\frac{1}{2}\int_{V_2}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2)\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{21}$$

式(21)中 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2$ 分别是两个带电物体极化强度的改变量．因此式(21)等式右边第3和第6项类似前面式(17)两种特殊情况中的一种，为两个带电物体极化状态改变所作的功．而第1、2、4、5项一起构成电势能，即把两个带电物体分别单独存在时的极化状态视作永久不变时，它们之间的互作用能．下面证明第1、2、4、5项一起构成电势能．

因为是极化永久不变的带电物体，极化电荷分布不变，因此可把带电物体1视为由 ρ_1、ρ_{p1}、σ_{p1} 构成的真空中一个不变的纯电荷系统，它激发的电势为 φ_1，带电物体2视为由 ρ_2、ρ_{p2}、σ_{p2} 构成的不变的纯电荷体系，它激发的电势为 φ_2．空间为真空．显然，在电荷系统1的电场 φ_1 中，把电荷系2从无穷远处移到 V_2 区域和 S_2 面上，所作的功为

$$W_{p1} = \int_{V_2}\rho_2\varphi_1\mathrm{d}V + \int_{V_2}\rho_{p2}\varphi_1\mathrm{d}V + \oint_{S_2}\sigma_{p2}\varphi_1\mathrm{d}S \tag{22}$$

W_{p1} 实际上是电荷系统2处于 φ_1 电场中所具有的电势能．同样，在电荷系统2的电场 φ_2 中，把电荷系统1从无穷远处移到 V_1、S_1 上所作的功为

$$W_{p2} = \int_{V_1}\rho_1\varphi_2\mathrm{d}V + \int_{V_1}\rho_{p1}\varphi_2\mathrm{d}V + \oint_{S_1}\sigma_{p1}\varphi_2\mathrm{d}S \tag{23}$$

显然这两种情况作的功相等．因为由式(16)、(19)、(20)有

$$\begin{aligned}W_{p1} = &\int_{V_2}\rho_2\varphi_1\mathrm{d}V + \int_{V_2}\rho_{p2}\varphi_1\mathrm{d}V + \oint_{S_2}\sigma_{p2}\varphi_1\mathrm{d}S = \\ &\int_\infty\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{D}_2\mathrm{d}V - \int_\infty\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}V = \\ &\int_\infty\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}V = \int_\infty\boldsymbol{E}_2\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{P}_1)\mathrm{d}V = \\ &\int_{V_1}\rho_1\varphi_2\mathrm{d}V + \int_{V_1}\rho_{p1}\varphi_2\mathrm{d}V + \oint_{S_1}\sigma_{p1}\varphi_2\mathrm{d}S = \\ &W_{p2}\end{aligned} \tag{24}$$

即 $\frac{1}{2}W_{p1} = \frac{1}{2}W_{p2}$．故极化永久不变的两个带电物体间电势能为

$$W_p = W_{p1} = W_{p2} = \frac{1}{2}(W_{p1}+W_{p2}) \tag{25}$$

式(25)即式(21)的第 1、2、4、5 项之和，证毕. 证明了这 4 项为电势能，余下两项就是极化状态改变所作的功.

这样，式(17)和式(21)的物理意义是，两个带电物体的相互作用能等于它们的电势能加上它们极化状态改变所作的功. 从物理图像看，当在一个带电物体的电场中，把另一个带电物体从无穷远移入时，此过程可视为分两步进行. 首先假设两个带电物体的极化状态不变，把其中一个移入另一个的电场中所作的功，成为电势能. 然后再假设两个物体的极化状态从单独时的状态变到同时存在时的状态，状态改变作的功成为介质的极化能的增量. 当然，实际过程是这两步同时进行的.

需要指出的是，互作用能的这个物理意义不是本文的猜测，文献中早有论述. 文献[7]在讲到电介质中的静电能时，明确指出"有电介质存在时，不仅把真实的(宏观的)电荷移进来要作功，而且对媒质中产生的某种极化状态也要做功. ……"这个论述符合客观物理过程. 本文只是对过去被忽视的内容，给予"强调和明确"而已.

式(17)是在电荷不变的情况下得到的，如果是两个电势不变的导体，或者其中一个是电势不变的导体时，外电源将提供能量. 相互作用能应是电势能、外电源提供的能量和极化状态改变所作的功这三者之和. 另外，对于两个电量不变的导体或一个电量不变，另一为电势不变的导体等情况的互作用能，我们将另行讨论.

3　例题

下面举例说明式(17)和(21)的应用. 由于是两个带电物体，计算稍冗长.

例题　两块介电常量分别为 ε_1 和 ε_2，分别带有点电荷 q_1 和 q_2 的半无限大的介质，以 $z=0$ 平面为分界面. 在 ε_1 介质中，$z=h_1$ 处有点电荷 q_1，在 ε_2 介质中 $z=-h_2$ 处有点电荷 q_2，如图 2. 求这两块半无限大的带电介质之间的相互作用能.

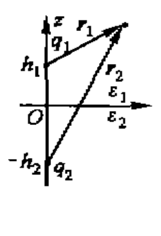

图 2

由文献[8]，两带电物体同时存在时的电势分布为

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\dfrac{1}{r'_1}\right]+\dfrac{q_2}{2\pi}\dfrac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{1}{r_2} & z>0\\ \dfrac{q_1}{2\pi}\dfrac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_2}\left[\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\dfrac{1}{r'_2}\right] & z<0\end{cases}\tag{26}$$

其中：$r_1^2=x^2+y^2(z-h_1)^2$、$r'^2_1=x^2+y^2+(z+h_1)^2$，$r_2^2=x^2+y^2+(z+h_2)^2$，$r'^2_2=x^2+y^2+(z-h_2)^2$，ε_1 介质表面($z=0^+$)极化电荷为

$$\sigma'_p=-\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{P}\big|_{z=0^+}=-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\left\{\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\frac{z-h_1}{r_1^3}-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{z+h_1}{r'^3_1}\right]+\frac{q_2}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{z+h_2}{r_2^3}\right\}\Bigg|_{z=0^+}=$$
$$\frac{q_1}{2\pi}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{h_1}{(x^2+y^2+h_1^2)^{3/2}}-\frac{q_2}{2\pi}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{h_2}{(x^2+y^2+h_2^2)^{3/2}}\tag{27}$$

ε_2 介质表面($z=0^-$)极化电荷分布为

$$\sigma''_p=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{P}\big|_{z=0^-}=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\left\{\frac{q_1}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{z-h_1}{r_1^3}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_2}\left[\frac{z+h_2}{r_2^3}-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{z-h_2}{r'^3_2}\right]\right\}\Bigg|_{z=0^-}=$$
$$\frac{q_2}{2\pi}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{h_2}{(x^2+y^2+h_2^2)^{3/2}}-\frac{q_1}{2\pi}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{h_1}{(x^2+y^2+h_1^2)^{3/2}}\tag{28}$$

q_1、ε_1 带电物体单独存在时的电势为

$$\varphi_1=\begin{cases}\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_1}\left[\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}\dfrac{1}{r'_1}\right] & z>0\\ \dfrac{q_1}{2\pi}\dfrac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}\dfrac{1}{r_1} & z<0\end{cases}\tag{29}$$

其中 r_1 与 r'_1 与前面相同，见图 3.

ε_1 介质表面极化电荷分布为

$$\sigma_{p1}=-\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{P}_1\big|_{z=0^+}=-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_1}\cdot$$

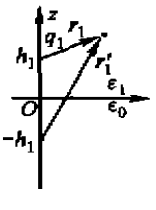

图 3

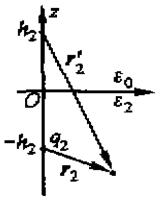

图 4

$$\left[\frac{z-h_1}{r_1^3}-\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}\frac{z+h_1}{r_1'^3}\right]\Bigg|_{z=0^+}=$$

$$\frac{q_1}{2\pi}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}\frac{h_1}{(x^2+y^2+h_1^2)^{3/2}} \tag{30}$$

总的极化面电荷,即电象大小为

$$\int_{z=0}\sigma_{p1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}q_1 \tag{31}$$

极化体电荷 $\rho_{p1}=\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}q_1\delta(x,y,z-h_1)$ (32)

自由电荷 $\rho_1=q_1\delta(x,y,z-h_1)$ (33)

q_2、ε_2 带电物体单独存在时,电荷分布为

$$\varphi_2=\begin{cases}\dfrac{q_2}{2\pi}\dfrac{1}{\varepsilon_0+\varepsilon_2}\dfrac{1}{r_2} & z>0\\[2ex] \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_2}\left[\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon_2}{\varepsilon_0+\varepsilon_2}\dfrac{1}{r'_2}\right] & z<0\end{cases} \tag{34}$$

其中 r_2 和 r'_2 与前相同,见图 4. ε_2 介质表面极化面电荷为

$$\sigma_{p2}=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{P}_2|_{z=0}=\frac{q_2}{2\pi}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2+\varepsilon_0}\frac{h_2}{(x^2+y^2+h_2^2)^{3/2}} \tag{35}$$

总极化面电荷,即电象大小为

$$\int_{z=0}\sigma_{p2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2+\varepsilon_0}q_2 \tag{36}$$

极化体电荷 $\rho_{p2}=\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}q_2\delta(x,y,z+h_2)$ (37)

自由电荷 $\rho_2=q_2\cdot\delta(x,y,z+h_2)$ (38)

相互作用能按式(21)计算.根据式(25),式(21)右边第1、2、4、5项构成的电势能可由式(23)计算.将式(32)、(33)、(34)代入式(23)右边第1,2项中,有

$$\int_{z>0}(\rho_1+\rho_{p1})\varphi_2\mathrm{d}V=\frac{q_1q_2}{2\pi}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\frac{1}{\varepsilon_2+\varepsilon_0}\frac{1}{h_1+h_2} \tag{39}$$

将式(30)、(34)代入式(23)右边第3项中,有

$$\oint_{z>0}\sigma_{p1}\varphi_2\mathrm{d}S=\int_{z=0}\sigma_{p1}\varphi_2\mathrm{d}S=\frac{q_1q_2}{2\pi\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}\cdot\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_2}\frac{1}{h_1+h_2} \tag{40}$$

式(39)+式(40)得

$$W_p=\frac{q_1q_2}{\pi}\frac{\varepsilon_0}{(\varepsilon_0+\varepsilon_2)(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}\frac{1}{h_1+h_2}=$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\varepsilon_0q_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}\cdot\frac{2\varepsilon_0q_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_0}\frac{1}{h_1+h_2} \tag{41}$$

其中 $\frac{2\varepsilon_0q_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_0}$ 是式(31)、(32)、(33)三者之和,为带电物体1的总电量;$\frac{2\varepsilon_0q_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_0}$ 是式(36)、(37)、(38)三者之和,为带电物体2的总电量.式(41)显然是两物体极化状态不变时的互作用能,即电势能.

极化状态改变作功为式(21)右边第3、6项之和,由于 ε_1、ε_2 介质均为均匀介质,自由电荷 ρ_1、ρ_2 分布不变,故极化体电荷不变,只是极化面电荷改变.即在 $z>0$ 的 ε_1 介质中有

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\nabla\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_1)=0$$

故式(21)第3项为

$$-\frac{1}{2}\int_{z>0}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\oint_{z>0}\varphi_2(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\frac{1}{2}\int_{z>0}\varphi_2\nabla\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)\mathrm{d}V=$$

$$\frac{1}{2}\int_{z=0}\varphi_2(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\int_{z=0}\varphi_2(\sigma'_p-\sigma_{p1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中利用了无穷大半球面面积分为0.将式(27)、(30)、(34)代入,得

$$-\frac{1}{2}\int_{z>0}\boldsymbol{E}_2\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)\cdot\mathrm{d}V=$$

$$\frac{1}{2}\int_{z=0}\varphi_2(\sigma'_p-\sigma_{p1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\frac{q_1q_2}{4\pi}\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_0)(\varepsilon_2+\varepsilon_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{1}{h_1+h_2}+\frac{q_2^2}{4\pi}\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{(\varepsilon_2+\varepsilon_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{1}{2h_2} \tag{42}$$

同理,对于式(21)的第6项,将式(28)、(29)、(35)代入,有

$$-\frac{1}{2}\int_{z<0}\boldsymbol{E}_1\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2)\mathrm{d}V=$$

$$\frac{1}{2}\int_{z=0}\varphi_1(\sigma''_p-\sigma_{p2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\frac{q_1q_2}{4\pi}\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_0)(\varepsilon_2+\varepsilon_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{1}{h_1+h_2}+\frac{q_1^2}{4\pi}\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{1}{2h_1} \tag{43}$$

极化状态改变作功为式(42)、(43)之和:

$$W_{\Delta p}=\frac{q_1q_2}{2\pi}\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_0)(\varepsilon_2+\varepsilon_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{1}{h_1+h_2}+$$

$$\frac{q_1^2}{4\pi}\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{1}{2h_1}+$$

$$\frac{q_2^2}{4\pi}\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{(\varepsilon_0+\varepsilon_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{1}{2h_2} \tag{44}$$

相互作用能为式(41)、(44)之和:

$$W_{\text{i}}=\frac{q_1q_2}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\frac{1}{h_1+h_2}+\frac{q_1^2}{4\pi}\frac{(\varepsilon_0-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\cdot\frac{1}{2h_1}+\frac{q_2^2}{4\pi}\frac{(\varepsilon_0-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_0+\varepsilon_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{1}{2h_2} \tag{45}$$

这就是半无限大的 q_1、ε_1 带电物体与 q_2、ε_2 带电物体的互作用能.式(45)的结果也可直接从式(2)或式(17)得到.

对上述结果作如下讨论:

1) 当 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_0$,或 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_0=\varepsilon$ 时,即真空或均匀介质 ε 充满整个空间时,由式(45)有

$$W_{\text{i}}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{h_1+h_2}\quad 或\ W_{\text{i}}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{h_1+h_2} \tag{46}$$

是真空中或均匀介质 ε 充满时,点电荷 q_1 与 q_2 的互作用能,仅为电势能.

2) 当 $q_2=0$,$\varepsilon_1=\varepsilon_0$ 时,式(45)右边第1、3项为0,得

$$W_{\text{i}}=\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_2}{\varepsilon_0+\varepsilon_2}\frac{1}{2h_1} \tag{47}$$

是真空 q_1 的电场中,移入一块不带电的 ε_2 介质的互作用能,仅仅是使 ε_2 介质极化状态改变所作的功,它等于点电荷 q_1 与将它的电象 $q_1\cdot\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_2}{\varepsilon_0+\varepsilon_2}$ 视为真实电荷时的互作用能的一半.

3) 当 $\varepsilon_1=\varepsilon_0$ 时,式(45)右边第3项为0,得

$$W_{\text{i}}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\varepsilon_0q_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_0}\frac{1}{h_1+h_2}+\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_2}{\varepsilon_0+\varepsilon_2}\frac{1}{2h_1} \tag{48}$$

是真空 q_1 的电场中移入 q_2、ε_2 带电物体的互作用能.式(48)右边第1项为 q_1 与 q_2、ε_2 带电物体的电势能,q_2、ε_2 带电物体的总电量为式(36)、(37)、(38)三者之和.第2项为 ε_2 介质极化状态改变所作的功、与式(47)相同.

4) 当 $q_2=0$,$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ 时,式(45)右边仅有第2项,为

$$W_{\text{i}}=\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_0-\varepsilon)}{\varepsilon(\varepsilon+\varepsilon_0)}\frac{1}{2h_1} \tag{49}$$

是在 q_1、ε 带电物体的电场中、移入一块中性的 ε 相同介质的互作用能.显然,互作用能仅仅是被移入介质的极化状态改变作的功,没有电势能.因为是相同介质,移入后 $z=0$ 分界面上极化面电荷消失,而移入前 q_1、ε 带电物体在 $z=0$ 平面上有极化电荷,如式(30)、(31)所示.因此,被移入介质的 $z=0$ 表面极化电荷应为式(30)、(31)的负值,以抵消 q_1、ε 带电物体的极化面电荷,故式(49)中象电荷为式(31)的负值,且有 $\frac{1}{2}$ 因子.

5) 当 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ 时,式(45)为

$$W_{\text{i}}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{h_1+h_2}+\frac{1}{2}\frac{q_2^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{+\varepsilon}\frac{1}{2h_2}+\frac{1}{2}\frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{+\varepsilon}\frac{1}{2h_1} \tag{50}$$

是在 q_1、ε 带电物体的电场中移入一个 q_2、ε 带电物体时的互作用能.显然,式(50)右边第1项为电势能,与式(46)相同.第2、3项分别为两块介质极化状态改变所作的功,类似于式(49),是使 $z=0$ 平面极化电荷消失必须作的功.

由此例可见,互作用能一般公式不仅能够求解各种特殊情况,而且也能求解一般情况.同时也可看到互作用能的物理意义,它是电势能和极化状态改变作功两部分之和.如果介质是均匀的话,则极化状态改变主要反映在极化面电荷的改变,而极化体电荷不变.若用象电荷等效代替极化面电荷的改变、并且两个带电物体中有一个是纯电荷体系,或者有一个是不带电的中性物体时,则极化状态改变作功就等于原电荷与它的象电荷视为真实电荷时的相互作用能之半,即有1/2因子.事实上利用这个结论,在很多情况下,可以直接写出互作用能的结果、不必通过公式计算,例如本例中的讨论.又如本文第1部分中的例题、电荷 q 和电荷 Q 的互作用能,即电势能、为式(11)第1项.而导体球在 q 的影响下、产生感应电荷.若负感应电荷用位于 $z=R_0/h$ 处的象电荷 $-qR_0/h$ 等效代替,正感应电荷用位于 $z=0$ 处的象电荷 qR_0/h 等效

代替,外力移动导体球进入 q 的电场中,使球的带电状态变化所作的功,等于原电荷 q 与它的象电荷视为真实电荷时的互作用能之半,即式(11)第2项.两项之和为点电荷与带电导体球的互作用能.这样,物理概念和图像非常清楚,计算又十分简便.

4 结论

从上述讨论可见,常用互作用能公式(1)、(4)和由此推出的其他关系式,确切地说,应是电荷系统的电势能公式,或者说是极化状态永久不变的带电物体之间的互作用能公式.而静电场中移入一块中性的线性介质的互作用能,即文献[4~6]中的公式,确切地说是被移入介质的极化状态改变所作的功,或者说是电势能为0时的互作用能公式,这是两种特殊情况.互作用能一般公式应是式(2)或式(17)或式(21).更为重要的是式(21)指明了互作用能的一般含义,两个带电物体的互作用能不同于重力场中物体具有的能量,它的含义更广泛,它包括势能、极化状态改变作功和外电源提供的能量.重力场中的互作用能就是势能,势能就是互作用能.极化状态改变作功是对介质(或导体)而言,它依赖于另一个带电物体的存在,不是孤立的.而势能是对两个相互独立、而且是不变的电荷系统而言的.如果这个不变是要外电源来维持的话,则互作用能还包括外电源提供的能量.因此互作用能、势能和状态改变作功三个概念不能混淆.搞清这些概念,许多情况下可以直接写出互作用能的结果,不必另行计算.

参考文献:

[1] 蔡圣善,朱耘.经典电动力学[M].上海:复旦大学出版社,1985.92.

[2] 何启智等.电动力学[M].北京:高等教育出版社,1985 147.

[3] 张泽瑜,赵均.电动力学[M].北京:清华大学出版社,1987.39,42.

[4] 杰克逊 J D.经典电动力学 上册[M].北京:人民教育出版社,1981.177~180.

[5] 斯特莱顿 J A.电磁理论[M].北京:科学出版社,1992.88,98.

[6] 杜浩.稳定电磁场中移入一块介质的互作用能[J].大学物理,1989,8(1):10.

[7] 杰克逊 J D.经典电动力学 上册[M] 北京:人民教育出版社,1981.175~176.

[8] 杰克逊 J D.经典电动力学 上册[M].北京:人民教育出版社,1981.163.

Interaction energy、potential energy and work done in changing polarization state

DU Hao

(Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang, 321004, China)

Abstract: It is pointed out that the interaction energy formulas given by some textbooks and reference books is only the potential energy formulas. Besides the potential energy, the interaction energy between two charged ploarizable objectes should include the work done in changing polarizationstate of the objects due to inter－polarization and the energy supplied from the external source. A general formulas of the interaction energy between two charged objects is obtained.

Key words: interaction energy; potential energy; charged ploarizable object; system of pure charnges