电磁场的不变量的求证方法讨论

刘裕光，张宝峰

（天津大学 理学院，天津 300072）

摘要：用几种不同的方法对电磁场的不变量进行了求证和讨论，指出每种方法都可以归结为利用四维协变张量元素本身构造出洛伦兹不变量.

关键词：电磁场；四维协变张量；洛伦兹不变量

中图分类号：O 442　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-0712(2003)02-0025-02

电磁场的不变量是指 $B^2-\frac{1}{c^2}E^2$ 和 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$，它们在四维空间"转动"（洛伦兹变换）下保持不变，故称为洛伦兹标量或不变量[1]，这两个不变量的直接意义是表明真空中的平面电磁波（$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}|/c$ 和 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}=0$）在所有的惯性系中仍为平面波.

对这两个不变量证明的依据是电磁场张量

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3\\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0\end{pmatrix}$$

是一个四维协变张量，在惯性系变换下满足变换关系，$F'_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}$，变换系数矩阵

$$\alpha=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$$

其中 $\beta=v/c$，$\gamma=1/\sqrt{1-v^2/c^2}$，方阵 α 的行列式 $\det(\alpha)=1$，且有 $\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\lambda}=\delta_{\nu\lambda}$.

下面我们采用不同方法求出这两个不变量，再给以证明和讨论，首先利用指标收缩，可以由四维协变张量元素本身构造成洛伦兹不变量，

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2=\frac{1}{2}(F_{11}F_{11}+F_{12}F_{12}+\cdots+F_{44}F_{44})=$$
$$\frac{1}{2}2(F_{12}^2+F_{13}^2+F_{14}^2+F_{23}^2+F_{24}^2+F_{34}^2)\quad(1)$$

把对应的电磁场场量代入，结果为：$B^2-\frac{1}{c^2}E^2$.

式(1)为不变量，证明如下：

$$F_{\mu\nu}^2=F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\alpha}\alpha_{\nu\beta}F'_{\alpha\beta}\alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\tau}F'_{\lambda\tau}=\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\tau}F'_{\alpha\beta}F'_{\lambda\tau}=$$
$$F'_{\alpha\beta}F'_{\alpha\beta}=F'^2_{\mu\nu}=\text{不变量}$$

我们在教学中发现，利用四维协变张量自身作二次点乘，也得到上面的结果，即

$$-\frac{1}{2}\mathrm{spur}[(F_{\mu\nu})(F_{\mu\nu})]=-\frac{1}{2}(F_{11}^2+F_{12}F_{21}+F_{13}F_{31}+F_{14}F_{41}+F_{21}F_{12}+F_{22}^2+F_{23}F_{32}+F_{24}F_{42}+F_{31}F_{13}+F_{32}F_{23}+F_{33}^2+F_{34}F_{43}+F_{41}F_{14}+F_{42}F_{24}+F_{43}F_{34}+F_{44}^2)=B^2-\frac{E^2}{c^2}\quad(2)$$

式(2)为不变量，证明如下：

$$F_{\mu\nu}F_{\nu\mu}=\alpha_{\mu\alpha}\alpha_{\nu\beta}F'_{\alpha\beta}\alpha_{\nu\lambda}\alpha_{\mu\tau}F'_{\lambda\tau}=\delta_{\alpha\tau}\delta_{\beta\lambda}F'_{\alpha\beta}F'_{\lambda\tau}=$$
$$F'_{\alpha\beta}F'_{\beta\alpha}=F'_{\mu\nu}F'_{\nu\mu}=\text{不变量}$$

求证另一个不变量，仍然可以由电磁场张量这个四维协变张量来构造成洛伦兹标量，为此还需要引入一个赝张量，它定义为：

$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}=0$（如果 $\mu\nu\lambda\tau$ 中有两个指标是一样的）

$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}=1$（如果 $\mu\nu\lambda\tau$ 可以用偶数次的对调变为 1234）

$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}=-1$（如果 $\mu\nu\lambda\tau$ 可以用奇数次的对调变为 1234）

我们称它为赝张量是因为在惯性系变换下，它是一个"数值不变"的张量[2]，证明如下：因

$\det(\alpha)=\alpha_{1\alpha}\alpha_{2\beta}\alpha_{3\gamma}\alpha_{4\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$，$\varepsilon'_{\mu\nu\lambda\tau}=\alpha_{\mu\alpha}\alpha_{\nu\beta}\alpha_{\lambda\gamma}\alpha_{\tau\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$

收稿日期：2001-04-11；**修回日期**：2002-04-10

作者简介：刘裕光(1947—)，男(回族)，天津人，天津大学理学院应用物理系副教授，硕士.

注意到 $\alpha_{\mu\alpha}\alpha_{\nu\beta}\alpha_{\lambda\gamma}\alpha_{\tau\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 也是一个行列式，根据行列式交换行(列)时变号之性质，可有

$$\epsilon'_{\mu\nu\lambda\tau} = \alpha_{\mu\alpha}\alpha_{\nu\beta}\alpha_{\lambda\gamma}\alpha_{\tau\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \alpha_{1\alpha}\alpha_{2\beta}\alpha_{3\gamma}\alpha_{4\delta}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\alpha)\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$$

利用这个赝张量，由电磁场张量构成不变量 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$：

$$\frac{ci}{8}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}F_{\mu\nu}F_{\lambda\tau} = \frac{ci}{8}(F_{12}F_{34} - F_{12}F_{43} - F_{13}F_{24} + F_{13}F_{42} - F_{14}F_{32} + F_{14}F_{23} - F_{21}F_{34} + F_{21}F_{43} + F_{23}F_{14} - F_{23}F_{41} - F_{43}F_{12} + F_{43}F_{21} + F_{31}F_{24} - F_{31}F_{42} - F_{32}F_{14} + F_{32}F_{41} + F_{34}F_{12} - F_{34}F_{21} - F_{41}F_{23} + F_{41}F_{32} + F_{42}F_{13} - F_{42}F_{31} - F_{43}F_{12} + F_{43}F_{21}) = \frac{ci}{8}\left[-\frac{8i}{c}(B_3E_3 + B_2E_2 + B_1E_1)\right] = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$$

这个结果是不变量的证明如下：

$$\frac{ci}{8}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}F_{\mu\nu}F_{\lambda\tau} = \frac{ci}{8}\alpha_{\alpha\mu}\alpha_{\beta\nu}\alpha_{\gamma\lambda}\alpha_{\delta\tau}\epsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta}\alpha_{\alpha'\mu}\alpha_{\beta'\nu}F'_{\alpha'\beta'}\alpha_{\gamma'\lambda}\alpha_{\delta'\tau}F'_{\gamma'\delta'} = \frac{ci}{8}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\delta_{\gamma\gamma'}\delta_{\delta\delta'}\epsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta}F'_{\alpha'\beta'}F'_{\gamma'\delta'} = \frac{ci}{8}\epsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta}F'_{\alpha\beta}F'_{\gamma\delta} = \frac{ci}{8}\epsilon'_{\mu\nu\lambda\tau}F'_{\mu\nu}F'_{\lambda\tau} = \text{不变量}$$

$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$ 这个不变量还可以通过计算矩阵 $F_{\mu\nu}$ 的行列式得到：

$$\det(F) = -(F_{14}F_{23} - F_{24}F_{13} + F_{34}F_{12})^2 \tag{3}$$

式(3)为不变量，证明如下：

按行列式定义，$\det(\alpha)=1$ 与 $F_{\mu\nu}$ 变换关系，有

$$\det(F') = F'_{1\alpha}F'_{2\beta}F'_{3\gamma}F'_{4\delta}\epsilon'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \alpha_{1\mu}\alpha_{\alpha\nu}F_{\mu\nu}\alpha_{2\lambda}\alpha_{\beta\tau}F_{\lambda\tau}\alpha_{3\rho}\alpha_{\gamma\sigma}F_{\rho\sigma}\alpha_{4\theta}\alpha_{\delta\omega}F_{\theta\omega}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\alpha)\epsilon_{\nu\tau\sigma\omega}\alpha_{1\mu}F_{\mu\nu}\alpha_{2\lambda}F_{\lambda\tau}\alpha_{3\rho}F_{\rho\sigma}\alpha_{4\theta}F_{\theta\omega} = \alpha_{1\mu}\alpha_{2\lambda}\alpha_{3\rho}\alpha_{4\theta}\det(F)\epsilon_{\mu\lambda\rho\theta} = \det(\alpha)\cdot\det(F) = \det(F)$$

把张量元素所代表的电磁场场量代入式(3)中得

$$\det(F) = -\frac{1}{c^2}(E_1B_1 + E_2B_2 + E_3B_3)^2 = -\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2$$

以上讨论的求证电磁场不变量的方法，都是利用四维协变张量元素本身来构造成洛伦兹不变量，再把元素表示的电磁场场量代入而求出了这个不变量的电磁场场量表达式.

如果我们利用四维协变张量的变换关系，把电磁场场量的变换关系求导出来：$E'_{/\!/} = E_{/\!/}$，$B'_{/\!/} = B_{/\!/}$，$E'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp}$，$B'_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)_{\perp}$，式中 $/\!/$ 和 $\perp$ 分别表示与相对速度 v 平行和垂直的分量，那么我们利用这些场量之间的变换关系也可以证明在任意惯性系上 $B^2 - \frac{1}{c^2}E^2$ 和 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$ 都是洛伦兹不变的：

$$B'^2 - \frac{1}{c^2}E'^2 = (B'_1\boldsymbol{e}'_1 + B'_2\boldsymbol{e}'_2 + B'_3\boldsymbol{e}'_3)^2 - \frac{1}{c^2}(E'_1\boldsymbol{e}'_1 + E'_2\boldsymbol{e}'_2 + E'_3\boldsymbol{e}'_3)^2 = B_1^2 + \gamma^2(B_2 + \frac{v}{c^2}E_3)^2 + \gamma^2(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2)^2 - \frac{1}{c^2}[E_1^2 + \gamma^2(E_2 - vB_3)^2 + \gamma^2(E_3 + vB_2)^2] = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 - \frac{1}{c^2}(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2)^2 =$$

$$B^2 - \frac{1}{c^2}E^2 = \text{不变量} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{B}' = E'_1B'_1 + E'_2B'_2 + E'_3B'_3 = [E_1B_1 + \gamma^2(E_2 - vB_3)(B_2 + \frac{v}{c^2}E_3) + \gamma^2(E_3 + vB_2)(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2)] =$$

$$E_1B_1 + E_2B_2 + E_3B_3 = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \text{不变量} \tag{5}$$

在式(4)、(5)的求证过程中，容易发现把 $B^2 - \frac{1}{c^2}E^2$ 和 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}$ 展开式中的场量用其对应的四维协变张量元素来代替，将分别是式(1)、(3)中已证明的洛伦兹不变量，即

$$B^2 - \frac{1}{c^2}E^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 - \frac{1}{c^2}(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) = F_{23}^2 + F_{13}^2 + F_{12}^2 + F_{14}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2 = \text{不变量} \tag{6}$$

和

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = E_1B_1 + E_2B_2 + E_3B_3 = ic(F_{14}F_{23} - F_{24}F_{13} + F_{34}F_{12}) = \text{不变量} \tag{7}$$

(6)、(7)两式表示的是求证电磁场不变量的一种最易于理解的方法，这样我们就分别以四种不同方法对每一个电磁场不变量作出了求证. 综观上述，每种方法最终都可以归结为依据四维协变张量的变换关系，由张量元素本身构造出洛伦兹不变量，只不过在求出这个构造式时，采用了各种不同的方法.

参考文献：

[1] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 第2版. 北京：高等教育出版社，1997. 262，273.

[2] 张宗燧. 电动力学及狭义相对论[M]. 北京：科学出版社，1957. 214.

（下转37页）

Abstract: We have developed the first CT experiment instrument of China and applied it to college physics experiment teaching. Theories and methods of CT, as well as the developing and working of the instrument, are presented, which include the physical and mathematical theory of CT, the structure, the performance and the principles of the instrument. Results of the experiment are given in the end, followed by some discussions on the significance of the instrument in physics experiment teaching.

Key words: computed tomography; CT experiment instrument; physics experiment teaching

(上接 26 页)

A discussion on the methods for determining the invariant of the electromagnetic field

LIU Yu-guang, ZHANG Bao-feng

(Science College of Tianjin University, Tianjin, 300072, China)

Abstract: Several methods for solving and proving the invariant of the electromagnetic field are given and discussed. It is pointed out that the invariant determined from different methods can written over a certain type of expression, i. e. the assembly made up of the elements of the four-dimensional covariant tensor.

Key words: electromagnetic field; four-dimensional covariant; Lorentz invariant

读者来信

姚启均原著《光学教程》(第 2 版)63～64 页上有这样一道例题:"一迈克耳孙干涉仪中补偿板 G_2 的厚度 $t=2$ mm,其折射率 $n_2=\sqrt{2}$,若将补偿板 G_2 由原来与水平方向成 45°位置转至竖直的位置,设入射光的波长为 6 328 Å,试求在视场中,将会观察到多少条亮条纹移过?"

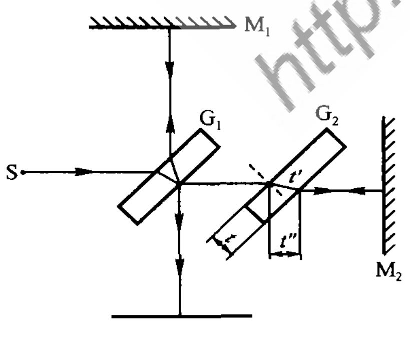

图 1　迈克耳孙干涉仪

该书在解题中首先计算了当 G_2 与水平方向成 45°时,光线在补偿板内的路程 $t'=t/\cos 30°$,30°是根据折射定律得出的光线在补偿板内的折射角.继而认为补偿板由原来与水平方向成 45°转到竖直位置,光程的改变为

$$n\Delta t=n(t'-t)=nt[(1/\cos 30°)-1]=0.438\ \text{mm}$$

故移过条纹数为 $N=\dfrac{n\Delta t}{\lambda/2}=1\ 384$.

需要指出的是,上述计算没考虑到补偿板 G_2 在与水平方向成 45°放置时,板内折射光所走的路程在水平方向的投影 t'',并不等于补偿板的厚度 t,而是

$$t''=t'\sin(45°+30°)=t\sin 75°/\cos 30°$$

因此当 G_2 由与水平成 45°转至竖直位置时,光程的改变应为

$$nt'-[nt+(t''-t)]=nt[(1/\cos 30°)-1]-t[(\sin 75°/\cos 30°)-1]=0.207\ \text{mm}$$

于是在视场中移过的条纹数应为

$$N=\frac{0.207}{6\ 328\times 10^{-7}/2}=654$$

这表明实际条纹移动数目不及题解中给出值的一半.

兰州大学物理系　李　莉